

섬유공업에서의 선형계획의 응용

I. 서 언

최근산업계에서는 경영합리화 또는 과학적 관리법 등에 관하여 깊은 관심을 가지고 이의 적용에 활발한 연구를 행하고 있음은 사실이다. 재래의 관리 는 생산성보다는 단순히 양적 문제만 치중하여 왔지만, 현재는 양적인 문제 뿐만 아니라 질적인 문제에도 동일한 비중을 주고 있다.

이러한 관리 분야에서 가장 큰 영향과 공헌을 미친 기법으로는 일차식선형계획(일반적으로는 그냥 선형계획으로 불리고 있으나 엄밀한 의미에서는 일차식 선형계획이 더욱 타당하므로, 본 논고에서는 이것을 사용하기로 한다)과 게임이론을 들 수 있다. 본 논고에서는 일차식선형계획의 개략적인 설명과 이를 섬유공업에 적용한 예를 들어 경영합리화에의 한 방안을 제시하기로 한다. 그런데 일차식선형계획은 게임이론의 전개에도 응용되므로, 이의 중요성은 한층 더 크다.

일차식 선형계획의 역사는 제2차대전으로 거슬러 올라간다. 즉, 1947년 미 공군에서 George B. Dantzig 등이 군사계획에 수학을 응용할 수 있는가를 조사하기 시작한 데서 그 근원을 찾을 수 있다. 이러한 연구 결과의 실시에 따른 효과가 상당히 컸으므로, 이의 연구는 계속되었으며, 이것이 1950년대에 와서는 일반 기업분야에 이용되기 시작하였다. 기업경영 분야에서 장족의 발전을 거듭해온 일차식선형계획은 1960년대에 와서는 공학분야는 물론, 정치, 경제 및 행정분야에 이르기까지 그 이용의 범위를 넓혀 왔으며, 근자에 이르러서는 어떠한 결정을 내리거나 계획을 수립하거나 대안을 선택하거나 혹은 집행절차를 수립하는 경우에도 이러한 기법의 원용여부가 연구검토되고 있는 상태이다.

일차식선형계획이란 한정된 자원을 적정분배하는 수학적 해석방법의 하나이다. 리니아(linear)라는 형용사는 수학적으로는 “일차식의”라는 뜻으로 이것을 도표화하면 직선으로 표시된다. 경제학적으로는 체증이나 체감이 작용하지 않는 비례함을 뜻한다.

프로그래밍(programming)이란 극한치의 범위내에서 최적해를 구하는 수학적 방법의 응용을 뜻한다.

일차식 선형계획으로서 문제가 성립하는 데에는 네가지의 요건이 있어야 한다. 즉,

- ① 목적함수(objective function)
- ② 목적달성을 위한 대안(alternatives)
- ③ 변수의 관계를 규정하는 구조식(structural equations)
- ④ 가용자원의 한계와 제약(Constraints) 등이다.

이상의 네 요건을 설명하기에 앞서 전형적인 한 예제를 들어 구체적으로 설명하기로 한다. 어느 가구공장에서 두 가지의 제품 즉, 책상(P_1)과 의자(P_2)를 만들고 있다. 원가계산에 의하면, 단위당 이윤이 각각 책상은 800원, 의자는 600원이라 한다. 제품을 제조하는 데에는 각각 A와 B의 두 공정을 거쳐야 하는데, 책상을 만드는 데에는 각 공정에서 4시간과 2시간의 작업을 소요하고, 의자를 만드는 데에는 2시간과 4시간이 소요된다. 각 공정의 총 가용시간은 각각 60시간, 48시간이라고 할 때, 이것을 어떻게 배분하여야 이 기업체의 이윤을 극대화 할 수 있는가 하는 것이 문제이다.

위에서 주어진 자료를 Table 1과 같이 요약할 수 있다.

첫 요건인 목적함수는 이 경우 총이윤(Z)의 극대이며, 총이윤은 책상과 의자의 생산량에 따라 변화한다. 즉, 목적함수는

$Z = 800P_1 + 600P_2$ 이다. 여기서 P_1 과 P_2 는 각각 책상과 의자의 생산 숫자를

의미한다. 일반적으로 목적함수는 극대화 또는 극소화로 표현되는데, 이를 선형계획의 이중성(dualism)이라 한다. 환언하면, 같은 문제로서도 목적함수를 극대화 또는 극소화로 표시할 수 있다는 것이다. 이 예제의 경우와 같이 주어진 가용자원으로서 총이윤의 극대로 하였으나, 일정한 생산량을 산출함에 있어서 총경비의 극소화로 목적함수를 표시하여도 같은 결과를 얻을 수 있다.

둘째의 요건인 목적달성을 위한 대안이란 책상과 의자의 생산량 변경가능을 의미한다. 가능한 대안의 예로는 총가용자원을 전적으로 책상 또는 의자의 생산에 충당할 수 있으며, 이러한 백합(product-mix)하나 하나가 하나의 대안이 된다.

셋째의 요건인 구조식이란 생산활동을 규정하는 변수 간의 관계를 말하며, 예제에서와 같이 한 단위의 책상과 의자를 만드는 데에는 A공정에서 각각 4시간과 2시간이 소요된다는 등의 것이 이에 해당한다.

넷째의 요건인 한계와 제약은 구조식과 변수를 묶은 상수로서 위의 예제에서는 총 가용시간과 생산량을 의미한다.

Table 1을 토대로 하여 이상의 네 요건을 결합, 선형계획의 문제로서 수식화하면 다음과 같다.

목적함수 $Z = 800P_1 + 600P_2$ 의 극대화를

① $4P_1 + 2P_2 \leq 60$

② $2P_1 + 4P_2 \leq 48$

③ $P_1 \geq 0$

④ $P_2 \geq 0$

등의 구조식과 제약조건 하에서 기하는 것이 문제이다.

일반적으로 변수의 수는 제약조건 수보다 많으므로, 양자의 차 만큼의

변수는 언제나 0의 값을 갖는 것으로 간주하여 문제를 풀어 나간다. 목적함수와 제약조건은 모두 일차식이므로, 도형에 의한 방법이나 대수적 방법에 의하여 풀 수 있으며, 보다 발전된 방법으로서 Simplex Algorithm에 의한 방법이 있다.

Table 1.

		책상(P_1)	의자(P_2)	총可用시간
공정	A	4	2	60
	B	2	4	48
단위당 이윤		800	600	

Simplex Algorithm은 선형계획의 제약조건식에 추가변수를 가함으로써 부등식을 등식으로 고치는 등의 조작을 거쳐 최초의 표를 작성하며, 이 표로부터 산법에 따라 여러 단계의 과정을 거쳐 최후로 최적해를 구하는 방법이다. 이의 원리는 주어진 행열의 역행열을 구하는 과정을 응용한 것이다. 본 논고에서는 실제의 계산과정을 생략하고 그 결과만을 보였다. 깊이를 원하는 독자는 행렬대수학을 참고하기 바란다.

전술한 바와 같이 경영자가 직면하는 여러 가지 문제를 해결하는 방법으로서 일차식선형계획의 응용은 매우 효율적이며, 할당문제, 배분문제, 수송문제, 일정계획문제, 혼식문제, 자금배정문제 등에 널리 이용되고 있다.

II. 섬유공업에서의 적용예

일차식선형계획을 취급한 몇몇 문헌을 보면 대부분이 수송문제와 같이 비

교적 간단한 예만 들고 있으며, 품질이나 시장의 예측 등과 같이 비교적 복잡한 예는 거의 피하고 있다. 본 논문에서는 정방공정에서의 사절과 사의 강력 등을 감안하여 최적 원면의 구매계획을 세우는 데에 이러한 선형계획을 이용하여 문제를 해결하는 방법을 예로 들어서 설명하기로 한다.

지난 70년도 말부터 면화가격이 큰 파동을 일으키고 있으며, 이러한 일은 지난 10여년 동안 없었던 일이다. 장치 어떻게 될 것인지는 아무도 예측할 수 없는 일이지만, 수요가 갑자기 늘어난 것은 사실이며, 이러한 추세는 당분간 계속될 것으로 보인다.

현재 정소면사로서 편직용이 파운드당 평균 75¢, 제직용 합연사가 87¢를 호가하고 있으며, 소면사도 편직용이 66¢, 제직용 합연사가 70¢를 상회하고 있다. 이들 가격은 어느 것이나 지난 70년도 여름에 비하여 5¢이상이 오른 값이다 또한 이들 가격은 고정된 것이 아니고 계속 변동을 보이고 있다. 가격이 더욱 비쌌에도 불구하고 현재 행하고 있는 조합이라고 해서 반드시 특정 원면을 구입할 수는 없다.

그러므로 실제로 방출하려는 제품용 원면의 구입문제에 신경을 쓰지 않을 수 없게 되었다.

결코 주먹구구식에 의할 수는 없다. 관련된 요인을 계통적으로 조합하여 최선의 구입계획을 세워야 한다. 이에 대한 해답은 일차식 선형계획에서 찾을 수 있다.

정방공정을 생각할 때, 중요한 공정조건으로는 조사의 굵기와 연계수 및 Spindle rpm의 셋을 들 수 있다. 이들 공정조건은 사절과 강력에도 상당한 영향을 줄 뿐만 아니라 운전비 등도 달라진다. 그러므로 문제는 원면을 적당히 배합하고 또한 공정조건도 어느 하나를 선정함으로써 총이윤을 극대화하는 것이다.

우선 이차식선형계획을 적용하기 위한 준비작업으로서 모형을 만들기로 하자. 사용할 원면은 X_1 (Western), X_2 (Memphis), X_3 (Plains), X_4 (Southeastern1), X_5 (Southeastern2)의 5종이며, 공정조건은 전술한 3종 중에서 어느 하나만을 생각하기로 하고 이것을 S_1, S_2, S_3 의 3수준이라고 하자.

3종의 공정조건 중에서 둘은 변경하지 않고 하나만을, 이를테면 Spindle rpm만을 S_1, S_2, S_3 의 3수준으로 바꾸며, 실제의 rpm은 각각 10,000, 11,000 및 12,000이라고 가정한다.

우선 rpm을 중앙값인 11,000으로 하고 다른 조건들은 모두 일정하게 한 다음, 위에서 언급한 5종의 원면을 각각 방출하여 얻은 수치를 알아야 한다. Table 2에 이것을 보고 있다.

Table 2

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Break factor	2,261	1,961	1,915	2,240	2,075
Ends down	11	20	45	15	56
Cost(\$ /lbs)	33.68	31.26	26.91	31.89	29.58

다음에 공정조건을 S_1, S_2 및 S_3 의 3수준으로 바꿈으로써 Table 2의 값이 어떻게 달라지는지를 알아야 한다. 이 경우 S_2 의 값은 Table 1을 작성할 때 사용한 중앙값이므로 break factor와 Ends down의 값은 변화를 보이지 않는다. Rpm의 증가에 따른 break factor와 ends down의 증가는 다음과 같은 식으로 표시할 수 있다.

$$1. \text{ Change in break factor} = 5/2 (\text{spindle speed})^2 - 125/2(\text{spindle speed}) + 385$$

$$2. \text{Change in end down} = 1/2 (\text{spindle speed})^2 - 13/2(\text{spindle speed}) + 11$$

Table 3에 필요한 수치를 보인다. Table에서 Cost한 운전비를 말한다.

Table 3

	S ₁	S ₂	S ₃
Changes in break factor	10	0	-5
Changes in ends down	-4	0	5
Loss due to carding (lbs/lbs feed)	0.1	0.1	0.1
Cost (\$/lbs)	20	15	10

목적함수의 방정식은 다음과 같아진다.

$$3. Z = 80.00y - 33.68X_1 - 31.26X_2 - 26.91X_3 - 31.89X_4 - 29.58X_5 - 20.00 S_1 - 15.00$$

$$S_2 - 10.00S_3.$$

$$y = \text{絲量(lbs./hr.)}$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 = \text{각 원면의 양(lbs./hr.)}$$

$$S_1, S_2, S_3 = S_1, S_2 \text{ 및 } S_3 \text{의 각 공정조건으로 처리한 사의 양(lbs./hr.)}$$

$$Z = \text{시간당 이익(¢)}$$

$$80.00 (y \text{의 계수}) = \text{사의 가격(¢/lbs)이다}$$

그런데 방출한 사의 break factor는 2,150이상이라야 하며, ends down은 1,000 spindle hour 당 40 이하라야 한다면 아래의 식이 성립되어야 한다.

$$4. 2,261X_1 + 1,961X_2 + 1,915X_3 + 2,240X_4 + 2,075X_5 = q_1$$

$$5. 11X_1 + 20X_2 + 45X_3 + 15X_4 + 56X_5 = q_2$$

$$6. 0.9q_1 + 10S_1 + 0 S_1 + 0S_2 - 5 S_3 \geq 2,150y$$

$$7. 0.9q_2 - 4S_1 + 0S_2 + 5S_3 \leq 40y$$

윗 식에서

$q_1, q_2 =$ 사의 break factor, ends down

(단위의 통일을 기하기 위하여 여기에서는 lbs/hr.로 함) 이다.

위의 식들은 원면의 품질을 제품 즉, 사의 품질을 바꾸는데 필요한 중간 단계의 것이며, 식 6과 7은 Carding에서 상실된 원면 즉, Waste를 감안한 것으로서 계수 0.9는 이에 대비한 값이다.

혼면 단계에서 각 원면의 혼합량, 혼면단계와 처리단계 간의 상실된 Waste의 문제 및 처리단계에서의 원면량에 관한 단계는 다음의 식들로 표시할 수 있다.

$$8. X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = T$$

$$9. S_1 + S_2 + S_3 = 0.9T$$

$$10. S_1 + S_2 + S_3 = y$$

식에서

$T =$ 소비한 전체 원면량(lbs/hr)이다

마지막으로 하나의 식을 추가하여야 한다. 즉, 원면의 처리량은 정방기의 용량 이내라야 한다는 조건이다. 그런데, Spindle rpm을 S_1 으로 할 때에는 정방기의 시간당 용량은 91lbs., S_2 에서는 100lbs., S_3 에서는 109 lbs. 이다. 전체의 용량을 100으로 할 때 S_1, S_2 및 S_3 에서 원면 1단위가 소요하는 비율은 각각 윗 값의 역수인 1.1, 1.0 및 0.92가 되므로 식은

$$11. 1.1 S_1 + 1.0 S_2 + 0.92 S_3 \leq 100$$

이 된다.

이로서 제약조건은 끝난 셈이다. 그러므로 식 4에서 식 11까지의 제약조건 하에서 목적함수의 식 3을 극대화하는 데에 필요한 y, X_i 및 S_i 의 값을 구할 수 있다. 이들 제약조건의 식은 모두 일차식이므로 일차식선형계획의 산법에

따라 쉽게 최적해가 구해진다.

Table 4에는 Simplex법에 따라 이 문제를 풀기 위한 최초의 표를 보이고 있다.

Table 4

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	q_1	q_2	T	S_1	S_2	S_3	T	
3. Profit (\$ per lbs)	33.68	31.26	26.91	31.89	29.58				-20	-15	-10	60	=Max. Z
4. Break factor	22.61	19.61	19.15	22.00	20.75	-1							= 0
5. Ends down	11	20	45	15	56		-1						= 0
6. Materials balance	1	1	1	1	1			-1					= 0
7. Break factor transfer equation(TR)						0.9			10	0	-5	21.59	= 0
8. Ends down TR						0.9			-1	0	5	-30	= 0
9. Raw material TR							0.9		1	1	1		= 0
10. Spinning capacity									1.1	1.0	0.92		= 100
11. Total yarn									1	1	1	-1	= 0

이 문제에서는 관련된 요인의 수가 상당히 많으므로, Simplex의한 방법도 상당한 시간을 필요로 한다. 가능하다면, Computer를 이용하는 방법이 가장 효율적일 것이다.

본 논고에서는 계산과정을 생략하고 결과만을 보이기로 한다.

즉, 최적해는

$$X_3 = 32.33 \text{ lbs./hr.}$$

$$X_4 = 88.44 \text{ lbs./hr.}$$

$$S_3 = 108.69 \text{ lbs./hr.}$$

로 할 때이며, 이 때 총이윤은 시간당 \$39.18로서 최대가 된다. 여기서 한

가지 주목할 점은 하급 원면에 속하는 X3를 약 27%나 가입하여도 사의 품질은 규정된 것 이상으로 할 수 있다는 점이다. 단순히 원면의 구입가격이 비싸다고 해서 값싼 원면을 사용하여 주먹구구식으로 방적하는 등의 방법에 비하여 이상과 같이 일차식선형계획을 적용함으로써 보다 확실성이 높은 숫자로 표시하는 것이 얼마나 유리하며, 또한 효율적인지를 위의 예로 알 수 있다.

이와 같이 일차식선형계획을 응용함으로써 한정된 자원으로도 최대의 효과를 얻을 수 있을 뿐만 아니라, 가격이 심한 변동을 보일 때에도 Parametric Programming이라는 개념을 사용하여 그에 대처할 수 있게 한다. 이 개념에 의하면, 어느 특정 원면의 가격이 계속 변동을 보일 때에도 최적구매계획이 어느 것이라는 것을 쉽게 알 수 있다.

원면 가격이 변동을 보이는 사태에서 이윤이 저하할 때에는 이러한 가격의 변동에 대처하지 못한 결과임을 쉽게 알 수 있다. 예를 들면 X_4 의 가격이 lbs당 31.89¢에서 34.89¢로 오른 경우에는 전술한 구매계획대로 구매한다면, 이윤은 \$39.18에서 \$36.53으로 떨어질 것이다. 그러나 Parametric Programming을 이용하여 새로운 조합 즉,

$$X_1 = 55.16$$

$$X_3 = 4.90$$

$$X_5 = 60.71$$

로 한다면(공정조건 역시 S_3 임.) 이러한 제약 하에서는 이윤은 \$28.23로서 최대가 된다.

이상의 문제에서는 원면의 가격과 break factor, Ends down과 같은 실의 품질면 및 공정 효율 등을 포함하여 일차식선형계획을 응용한 예이다. 범위를 좀 더 넓혀서 필요한 용량 이상으로 구입하여 이를 창고에 저장하는 것이 더욱

유리한지의 여부 즉, 재고관리 면에서의 문제도 포함될 수 있다.

Ⅲ. 결 론

전술한 바와 같이 일차식선형계획은 품질을 어느 선 이상으로 두고도 이익을 최대로 하기 위하여 원면의 혼합, 가격의 변동에 따른 품질유지, 재고관리, 생산계획 등의 문제를 해결하는 데에 매우 효율적인 방법이다.

그러나 여기에서 “최적”이라는 의미는 각 제약조건의 식이 어느 정도 수정되고 간략화 한 것이므로 진정한 의미에서 최적은 아니다. 그러므로 여러가지 관점에서 같은 작업을 여러 번 반복함으로써 최적조건에 가장 가까운 값을 얻어야 한다.