

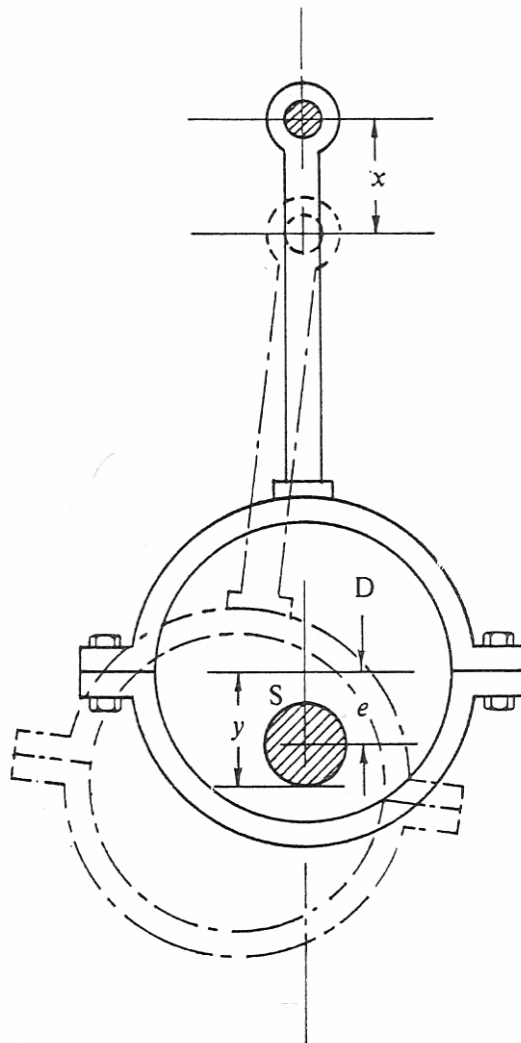
섬유수학

- 기구의 요소(14) -

10. 편심운동

10.1 개요

편심(eccentric)이란 말은 글자 그대로 중심이 한쪽으로 치우쳤다는 의미를 갖는다.



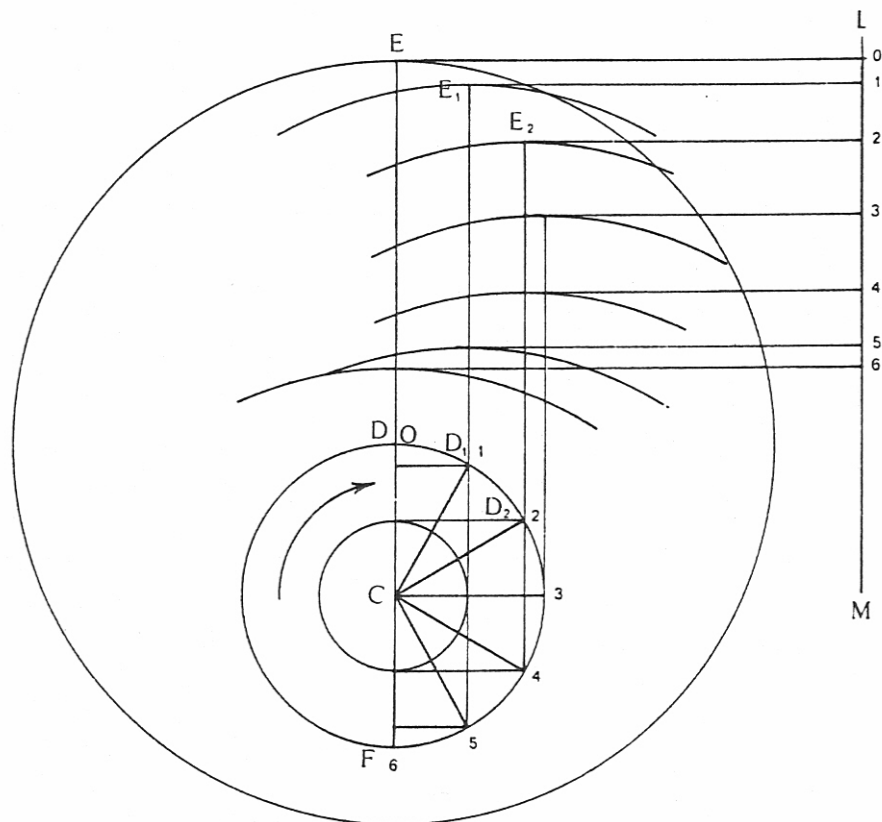
<그림 53> 편심장치

<그림 53>은 축에 고정되어 있는 원판을 보인 것으로 원판의 중심과 축의 중

심간에는 e 만큼의 간격이 있으며, 이 간격 e 를 이장치의 편심율이라고 한다. 원판의 주위에는 스트랩(strap) 또는 링이 둘러싸고 있으며, 여기서 연결로드가 연결되어 있다. 연결로드의 다른 한 끝은 선운동을 할 것이라고 가정하자. 축 S 가 완전히 1회전하면 연결로드는 편심율의 2배인 $2e$ 만큼 움직이게 된다. 이 운동의 특성은 SHM에 매우 가까우나 SHM과의 차이점은 스트랩이 원판 D 의 원주를 감고 있기 때문에 연결로드가 기울어진다는 것이다.

그러므로 변위 x 는 간격 y 보다 약간 더 커지게 된다.

<그림 54>는 SHM운동의 특성을 제도적으로 구하는 방법을 나타낸 것이다. 주축의 중심은 C 이며 편심율은 CD 이고, 원판의 지름은 DE 이다. 반지름 CD 인 원은 원판 D 가 회전하는 동안 원판의 중심이 그리는 궤적을 나타낸다. 축의 회전을 등간격으로 나누어 원판의 중심점을 $0, 1, 2, \dots$ 등으로 표시한다.



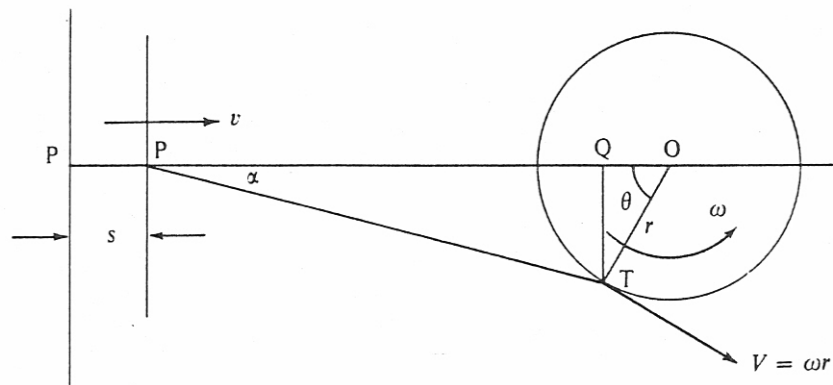
<그림 54> 편심운동의 분석

이러한 점들을 중심으로 하여 반지름 DE인 원호를 그려 스트랩의 끝이 움직이는 변감을 표시한다. 다시 이 원호들에 대해 수직선 D_1E_1 , D_2E_2 , D_3E_3 등을 그려서 원호와의 교차점을 구한다.

그 다음 이들 교차점으로부터 수평 접선을 그어 수직선 LM과 만나는 점을 0, 1, 2.....로 표시하면 $DE = D_1E_1 = D_2E_2.....$ 이므로 접선들의 수직변위(즉, 연결로드의 수직변위)는 반지름 DC인 원의 반지름이 지름 DF상에 비쳐진 영상의 변위와 일치하게 된다. 앞의 이론으로부터 이러한 변위를 하는 운동은 SHM이라는 것을 알 수 있다. 그러므로 이러한 편심운동에 의해 일정한 각속도로부터 SHM을 구할 수 있다. 다만 여기서는 연결로드의 기울어짐에 대한 오차를 무시했다.

10.2 크랭크와 구조 로드(connecting rod)

대부분 직기의 슬레이는 크랭크 축으로부터 구동되기 때문에 크랭크 및 연결로드 기구는 섬유기술자에게 매우 친숙한 기구이다. 이는 운동기구(linkage mechanism)의 한 형태로서 바(bar)가 4개 있는 연동기구가 더 정확하다. <그림 55>는 기본적인 4바 연동기구를 나타낸 것으로 슬레이장치의 구동은 이와 반대이다. 직기들은 고정바의 역할을 하며, 크랭크 암, 연결로드 및 슬레이 스위드 운동바의 역할을 한다.



<그림 55> 크랭크 및 연결 로드 기구

먼저 간단한 크랭크 및 연결로드 기구에 대해 분석한 후 직기의 슬레이 구동

에서 차이점을 설명하기로 한다. 다음에 설명하는 어떤 부분은 약간 생소할지도 모르지만 그 결과는 매우 흥미롭다.

10.2.1 피동편의 변위

<그림 55>에서 크랭크 축의 중심을 O, 크랭크 암을 OT(길이 r), 연결로드를 PT(길이 l), 피동편을 P라고 하면 P의 운동선은 중심 O를 통과하며 수평의 가이드를 따라 미끄러지는 것으로 간주할 수 있다. 크랭크 암은 각속도 ω rad/s로 회전한다. 점 P는 최초 크랭크 암이 수평상태에 있을 때 P'에 있게 되므로 간격 OP'는 크랭크와 연결로드의 길이를 합한 것 $(r+l)$ 이 된다.

시간 ωt 초후 크랭크 암이 ωt 만큼 회전하였을 때의 각도를 θ 라고 하면 점 P는 OP' - OP 즉, PP' 만큼 움직이게 된다. 이 변위를 s라고 표시하면

$$OP = QP + OQ$$

$$S = OP - (QP + OQ)$$

$$S = (r+l) - (l \cos \alpha + r \cos \theta) \dots\dots\dots (10)$$

여기서 변위를 θ 와 α 의 함수로 나타내는 것보다는 θ 만의 함수로 표시하는 것이 편하므로 $\cos \alpha$ 를 θ 에 대한 함수로 치환할 필요가 있다.

삼각형 PQT와 QOT에서 QT가 공통이다. 따라서,

$$QT = l \sin \alpha \quad QT = r \sin \theta$$

$$\text{즉, } l \sin \alpha = r \sin \theta, \sin \alpha = \frac{r \sin \theta}{l}$$

양변에 제곱을 하면

$$\sin^2 \alpha = \frac{r^2 \sin^2 \theta}{l^2} \dots\dots\dots (11)$$

삼각함수 공식에서 $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ 이므로 이를 식 (11)에 대입하면

$$1 - \cos^2 \alpha = \frac{r^2 \sin^2 \theta}{l^2}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{l^2}$$

양변에 제곱근을 취하면

$$\cos \alpha = \left(1 - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (12)$$

오른쪽 변은 $(1-x)^n$ 인 형태이므로 2항분포의 이론을 사용하여 전개 시킬 수 있다. 2항분포에서 $(1-x)^n$ 은

$$1 - nx + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots \dots \dots (13)$$

으로 전개되므로 식(12)를 $x = \frac{r^2 \sin^2 \theta}{l^2}$, $n = 1/2$ 로 보아 전개시키면

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r^2 \sin^2 \theta}{l^2} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{1 \cdot 2} \right) \left(\frac{r^4 \sin^4 \theta}{l^4} \right) - \dots \dots \dots \\ &= 1 - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2l^2} - \frac{r^4 \sin^4 \theta}{8l^4} \dots \dots \dots \end{aligned}$$

여기서 제3차 항 이상이 미치는 영향은 매우 작으므로 이를 무시하면

$$\cos \alpha = 1 - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2l^2}$$

$\cos \alpha$ 가 θ 의 함수로 표시되었으므로 이를 식 (10)에 대입하면

$$\begin{aligned}
s &= (r + l) - \left\{ l \left(1 - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2l^2} \right) + r \cos \theta \right\} \\
&= r + l - l + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2l^2} - r \cos \theta \\
&= r + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2l^2} - r \cos \theta \\
&= r \left(1 - \cos \theta + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2l^2} \right) \dots \dots \dots (14)
\end{aligned}$$

위 식을 SHM식 $s = r(1 - \cos \theta)$ 와 비교해 보면 유효성을 찾을 수 있다.

식(14)에서 r 값이 l 에 비해 매우 작을 때 3번째 항은 작아져서 단진동운동식을 접근함을 알 수 있다. 실제로는 l/r 의 비를 선택하는 것이 중요하다 여기까지는 점 P의 변위에 대해 설명하였으나 이 설명을 마치기 위해서는 속도와 가속도까지 설명이 되어야 할 것이다. 앞의 증명과정이 어렵고 복잡하면 결론만을 머리속에 남겨두어도 무방하다.