

대기행렬이론과 그 응용(2)

4. 대기행렬 모델

대기행렬 모델에는 6가지 기본 요소들의 결합에 의해 매우 많은 수의 모델이 있을 수 있다. 그러나 여기서는 기본적으로 적용성이 큰 몇 가지 모델에서, 시스템 효율 비교의 척도의 하나인 L_s , W_s , L_q , W_q 에 대하여 간단히 기술하고자 한다. 그리고 유도과정은 그 과정이 매우 복잡하므로 생략한다.

4-1. (M/M/1) : (FCFS/ ∞/∞)

이 모델은 도착이 평균도착속도 λ 의 Poisson 분포를 따르고, 서비스시간이 평균서비스율 μ 의 exponential분포를 따르며, 그리고 서비스규칙은 FCFS이고, 서비스 하는 사람이 1사람이고, 시스템 내에 허용하는 고객 수와 발생원이 무한대인 경우이다.

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ 라 할 때

$$L_s = E\{n\} = \frac{\rho}{1-\rho} \quad (4)$$

$$L_q = L_s - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho^2}{1-\rho} \quad (5)$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} \quad (6)$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \quad (7)$$

이다.

4-2. (M/M/s) : (FCFS/ ∞/∞)

이 모델은 서비스 창구의 수가 $s \geq 1$ 이라는 점을 제외하고는 모델 4-1과

동일하다.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \frac{\rho}{s} < 1$$

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \cdot \frac{1}{(1 - \rho/s)} \right\}^{-1}$$

$$P^n = \begin{cases} \left(\frac{\rho^n}{n!} \right) P_0 & 0 \leq n \leq s \\ \left(\frac{\rho^n}{s^{n-s} s!} \right) P_0 & n > s \end{cases}$$

일 때

$$L_q = \frac{\rho^{s+1}}{(s-1)! (s-\rho)^2} P_0 \quad (8)$$

$$L_s = L_q + \rho \quad (9)$$

$$W_q = L_q / \lambda \quad (10)$$

$$W_s = W_q + 1 / \mu \quad (11)$$

4-3. (M/M/1) : (FCFS/N/∞)

이 모델은 시스템에 허용하는 최대고객수가 N이며, 그외는 모델 4-1과 같다.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad P_N = \text{고객을 잃을 확률,}$$

$$\bar{\lambda} = \lambda(1 - P_N)$$

일 때

$$L_s = \frac{\rho \{1 - (N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}\}}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})} \quad (12)$$

$$L_q = L_s - \frac{\bar{\lambda}}{\mu} = L_s - \frac{\lambda(1-P_N)}{\mu} \quad (13)$$

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} = \frac{L_q}{\lambda(1-P_N)} \quad (14)$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L_s}{\lambda(1-P_N)} \quad (15)$$

이다.

4-4. (M/M/s) : (FCFS/K/K), $s < K$

이 모델이 모델 4-1과 다른 점은 서비스 창구가 s 개 이고 발생원이 한정되어 있다는 점이다. 이 경우 시스템내의 고객 수를 $n(n=0, 1, 2, \dots, K)$ 이라고 하면 발생원에 남아있는 잠재적인 고객 수는 $K-n$ 뿐이다. 이 모델의 가장 중요한 응용은 기계수리의 경우인데 s (1)명의 수리공이 K 대의 기계의 작동유지를 책임지고 있는 경우이다. 이 기계대수가 여기서 발생원이 된다. 기계가 고장이 나서 서비스를 기다리고 있을 때 각각의 기계는 대기시스템 내에 있는 고객으로 간주되며, 작동하고 있을 때는 대기시스템 밖에 있는 것으로 간주한다.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^s \binom{K}{n} \rho^n + \sum_{n=s+1}^K \binom{K}{n} \frac{\rho^n}{s / s^{n-s}} \right\}^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} \binom{K}{n} \rho^n P_0 & 0 \leq n \leq s \\ \binom{K}{n} \frac{\rho^n}{s / s^{n-s}} P_0 & s \leq n \leq K \end{cases}$$

$\bar{s}$ = 쉬고 있는 수리공수의 기대값

$$= \sum_{n=0}^K (s-n) P_n$$

$$\bar{\lambda} = \mu(s - \bar{s})$$

일 때

$$L_q = \sum_{n=s+1}^K (n-s) P_n \quad (16)$$

$$L_s = L_q + \frac{\bar{\lambda}}{\mu} = L_q + (s - \bar{s}) \quad (17)$$

$$W_q = L_q / \bar{\lambda} \quad (18)$$

$$W_s = L_s / \bar{\lambda} \quad (19)$$

이다.

5. 대기행렬이론의 응용사례

5-1. 사례 1.

1) 문제설명

D라는 면방직회사가 있다. 이 회사의 H공장 권사공정에서는 틀잡이 한 사람당 15대의 권사기를 담당하고 있다. 그런데 한 관리자가 “담당기계대수를 2 배로 늘리고, 작업을 두 사람이 공동으로 하는 것이 보다 효과적일 것이다.”라는 제안을 해서 현재 이 공장에서는 이 제안을 신중히 고려하고 있다.

현재 H공장의 각 권사기당 사절수는 평균이 0.108회/분인 Poisson분포를 따랐다. 그리고 사절잇기시간, 목관공급시간, 만관보빈정돈시간 등과 같은 실제작업시간에다 이동간에 소요되는 시간, 여유시간 등을 모두 합한 1회 실잇기에 소요되는 시간은 평균이 0.7분인 지수(exponential) 분포를 따른다.

2) 문제분석

① 1사람이 15대 담당할 경우

이 문제의 상황은 제한된 발생원을 가지고, Poisson도착과 exponential 서비스를 하는 경우인 모델(M/M/s) : (FCFS/K/K) (제 4장 4절 참고)와 일치한다. 우선 1회 실잇기 작업에 소요되는 시간이 0.7분이므로 $\mu = 1/(0.7\text{분}) = 1.43\text{분}$, 그리고 $\lambda = 0.108/\text{분/대}$ 이다. 또 틀잡이가 1사람이고 담당기계대수가 15대이므로 $s=1, K=15$ 이다.

식(16), (18)에 의하여

$$LQ = 2.6\text{대}$$

$$WQ = 2.08\text{분/대}$$

이다.

② 2사람이 30대 담당할 경우

$\mu = 1.43 \times 2 = 2.86/\text{분}$ 이고 $\lambda = 0.108/\text{분/대}$ 이다. 그리고 $s=2, K=30$ 이다.

식(16), (18)에 의해서

$$LQ = 4.4\text{대}$$

$$WQ = 1.65\text{분/대}$$

이다.

따라서 2사람이 권사기 30대를 담당하고, 작업을 공동으로 하는 것이 1사람이 15대의 권사기를 전담하는 경우보다 대기행렬에

$$\text{약 } 15.4\% \left(= \frac{2.6 - 4.4/2}{2.6} \times 100 \right) \text{ 줄어들}$$

$$\text{고 약 } 21\% \left(= \frac{2.08 - 1.65}{2.08} \times 100 \right) \text{ 가 감}$$

소되므로 공동작업을 하는 것이 바람직하다.

5-2. 사례2

1) 문제설명

조립공정에서 두 개의 과정(A, B)을 거쳐 생산이 되고, 제품에 대한 자료가 다음과 같을 때 그림 3 5의 3가지 조립공정을 비교하여 최선의 조립공정배열을 찾기로 하자.

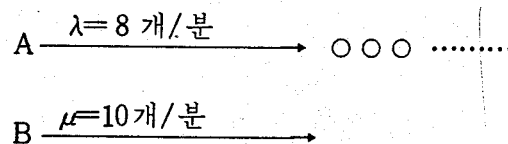
제품판매가 : 1 대당 4 원

제품재료원가 : 1 개당 1 원

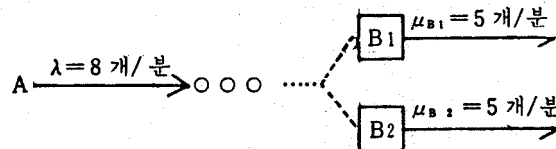
시설 A의 비용 : 1 분당 3 원

시설 B의 비용 : 1 분당 5원

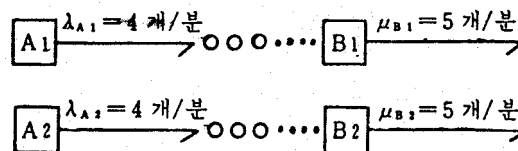
제품 보관료 : 1 분당 0.2원



<그림 3> 조립공정배열 1



<그림 4> 조립공정배열 2



<그림 5> 조립공정배열 3 (단, A1의 비용은 1분당 2.5원)

2) 문제분석

① 조립공정배열 1 의 경우

(M/M/1) : (FCFS/∞/∞) (제 4장 1절 참고)을 적용하면 식(5)에 의해서

$$L_q = \frac{(0.8)^2}{1 - 0.8} = 3.2$$

그리고 시스템의 n개가 있을 확률은

$$P_n = (1 - \rho) \rho^n$$

이 된다.

전체이윤은

총이익분 = 총 제품판매액 - 총비용

= (제품판매단가) (평균생산량)

- (제품재료원가) (평균생산량)

- (보관비용) (평균보관개수)

- 시설비용

= (4원)(1 - P₀) μ - (1원)(1 - P₀) μ - (0.2원)(LQ) - (3원 + 5원)

= (4원)(8) - (1원)(8) - (0.2원)

(3.2) - (8원)

② 조립공정배열 2의 경우

이 경우는 (M/M/2) : (FCFS/∞/∞)이므로 제 4장 2절에 의하여

$$\frac{\lambda}{\mu S} = \frac{8}{5(2)} = 0.8 < 1$$

$$P_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 \cdot \frac{1}{2(1 - \lambda/2\mu)} \right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{9}$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot P_0 = \frac{8}{45}$$

$$L_s = \frac{(\lambda/\mu)^3}{(2 - \lambda/\mu)^2} \cdot P_0 = 2.8$$

이 되므로 분당 10개 이상의 제품을 생산할 확률은 제품이 2개 이상 있어야 생산이 가능하므로,

$$1 - P_0 - P_1 = 1 - \frac{1}{9} - \frac{8}{45} = 0.71$$

이다.

5개/분 생산가능확률은 $P_1 = \frac{8}{45} = 0.18$ 이며, 0개/분이 생산될 확률은 $P_0 = \frac{1}{9} = 0.11$ 이 되므로 전체적인 생산기대량은,

$$10(0.71) + 5(0.18) + 0(0.11) = 8\text{개/분}$$

가 된다.

분당 총이익은

$$4\text{원}(8) - [(1\text{원})(8) + (0.2\text{원})(2.8) + (3\text{원}) + (5\text{원})] \\ = 32\text{원} - 16.56\text{원} = 15.44\text{원/분}$$

이 된다.

③ 조립공정배열 3 의 경우

$A_1 - B_1$ 의 경우를 보면

기대제품생산량 $= (1 - P_0)\mu$

$$= (0.8)(5) = 4\text{개/분}$$

전체시스템의 총이익은,

$$4\text{원}(8) - [(1\text{원})(8) + (0.2\text{원})(6.4) + (2.5\text{원}) + (5\text{원})] \\ = 32\text{원} - 16.78\text{원} = 15.22\text{원/분}$$

이상 3 경우 중 배열 2의 경우가 분당 이익이 가장 많은 것을 알 수 있다. 따라서 2번째 시스템, 즉 B의 시설만 2개로 나눈 시스템을 택할 것이다.

5-3. 사례 3

1) 문제설명

작은 회사에서 제품 A를 만들고 있다. 이 회사는 제품 A를 만드는 기계가 10대 있으나, 이 기계들은 가끔 고장이 나서 수리를 해야 하고, 작업자는

8대의 기계를 작동하고 있다. 그래서 두 대의 기계는 다른 기계가 고장이 났을 때 사용할 수 있도록 준비되어 있는 것이다. 그러므로 2대 이상의 기계가 고장 나지 않는 한 항상 8대의 기계가 운용되고 있다.

작동 중인 기계가 고장 날 때까지의 작동 시간은 평균 20일인 지수(exponential) 분포이다. 그리고 기계를 수리하는데 소요되는 시간 역시 지수분포인데 평균은 2일이다.

지금까지 이 회사는 한 사람의 수리공을 소용하고 있다. 그런데 이로 인하여 2대 이상이 고장 나서 8대 이하로 기계를 운용하는 경우가 많기 때문에 생산량이 줄어드는 결과를 초래하였다. 그러므로 한 사람의 수리공을 더 고용함으로써 동시에 2대 이상의 고장 난 기계를 수리할 수 있도록 하는 것을 고려 중이다.

각 수리공을 고용하는데 회사는 매일 70달러를 지불한다. 그런데 기계를 가동하지 못하여 제품 A를 생산하지 못함으로써 입는 예상 손해 액은 매일 100달러에 달한다(회사는 8대의 기계가 생산하는 상품은 팔 수 있으나 그 이상은 팔 수 없다).

2) 문제분석 1.

문제의 요점은 수리공의 고용비용 $E(SC)$ 와 기계정지로 생산하지 못함으로 인한 예상손해액 $E(WC)$ 의 합인 $E(TC)$ 를 최소로 하는 서비스 수준을 결정하는 것이다. 각 기계고장대수에서의 기계정지로 인한 손해액의 기대값은 특정의 기계대수가 고장날 확률 P_n 에다 고장 발생했을 때의 손해액 $g(n)$ 을 곱하면 된다. $E(WC)$ 는 이들 각 경우들의 기대값 합이다.

이 문제는 (M/M/s) : (FCFS/K/K) (제 4장 4절 참고) 모델을 약간 변화시킨 것으로서 $K=10$, $\lambda=0.05/\text{일}$, $\mu=0.5/\text{일}$ 이다.

이 회사는 2대의 기계를 여분으로 가지고 있으므로 시스템 내의 고객수(수리를 요하는 기계대수)가 둘을 넘지 않는 한 생산에 영향을 받지

않는다. 그렇지만 추가된 고객당(최대 10대까지) 예상되는 손해액은 매일 100달러이다. 그러므로 각 기계고장대수에 대한 예상 손해액 $E(WC)$ 의 함수 $g(n)$ 은

$$g(n) = \begin{cases} 0 & n=0, 1, 2 \\ 100(n-2) & n=3, 4, 5, \dots, 10 \end{cases}$$

이다.

따라서 수리공이 1사람과 2사람일 때의 기계정지로 인한 손해액 $E(WC)$ 는 표 1과 같다.

<표 1> $E(WC)$ 의 계산

N = n	g(n)	s = 1		s = 2	
		P_n	$g(n) P_n$	P_n	$g(n) P_n$
0	0	0.271	0	0.433	0
1	0	0.217	0	0.346	0
2	0	0.173	0	0.139	0
3	100	0.139	14	0.055	6
4	200	0.097	19	0.019	4
5	300	0.058	17	0.006	2
6	400	0.029	12	0.001	0
7	500	0.012	6	3×10^{-4}	0
8	600	0.003	2	4×10^{-5}	0
9	700	7×10^{-4}	0	4×10^{-5}	0
10	800	7×10^{-5}	0	2×10^{-5}	0
$E(WC)$		70달러/일		12달러/일	

한편 각 수리공을 고용함으로써 회사는 하루 당 70달러를 지불한다. 즉, 1사람의 수리공을 고용하는 경우는 고용비용 $E(SC)$ 가 70달러이고, 두 사람을 고용하면 $E(SC)$ 가 140달러이다. 이들 결과를 종합하면 전체비용 $E(TC)$ 는 표

2와 같다.

<표 2> E(TC)의 계산

s	E(SC)	E(WC)	E(TC)
1	70	70	140달러/일←최소
2	140	12	152달러/일
≥3	≥210	≥0	≥210달러/일

표 2에 의하면 수리공의 수가 1사람일 때의 전체비용이 140달러로 가장 비용이 적게 소용되므로 이 회사는 1사람의 수리공을 고용하는 것이 바람직하다.

3) 문제분석 2

이 회사에서는 최근 작업자의 작업방법을 개선하여 한 작업자가 10대의 기계를 담당할 수 있게 되었고, 또 영업분야에서도 판매촉진을 적극 추진하여 10대가 모두 가동하더라도 생산량 전부를 판매할 수 있게 되었다. 그래서 이 회사에서는 예비 기계 없이 전체기계 10대를 모두 가동하기로 하였다. 이러한 경우, 적정 수리공의 수에 대하여 분석해 보기로 하자.

이러한 상황은 제 4장 4절의 제한된 발생원을 가지는 모델 (M/M/s) : (FCFS/K/K)와 일치하다.

식(16)에 의해서 수리공이 한 사람일 경우 평균대기고객(기계)의 수 LQ_1 은

$$LQ_1 = 2.56 \text{대}$$

이며, 수리공이 두 사람일 경우의 대기고객 수

$$LQ_1 = 0.90 \text{대}$$

이다.

그리고 수리공의 고용비가 하루 당 70달러이므로 한 사람의 수리공을 고용할 경우 전체비용 $E(TC)_1$ 은

$$E(TC)_1 = 1 \times 70 + 100 \times 2.56 = 326(\text{달러})$$

이며, 2사람의 수리공을 고용할 경우 전체비용 $E(TC)_2$ 는

$$E(TC)_2 = 2 \times 70 + 100 \times 0.90 = 230(\text{달러})$$

이다.

따라서 이 회사는 2사람의 수리공을 고용하는 것이 보다 바람직한 의사 결정이다.